



## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет математики и компьютерных наук

### РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

**«Уравнения в частных производных»**

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа:

01.03.01 Математика

Профиль подготовки:

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Форма обучения:

Очная

Статус дисциплины: входит в обязательную часть ОПОП, фундаментальный модуль ОПОП

Махачкала 2022

Рабочая программа дисциплины «**Уравнения в частных производных**» составлена в 2022 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриат) от 10 января 2018 г. № 8.

Разработчик: кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа, Сиражудинов М.М., д. ф.-м.н., профессор

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры ДУ и ФА от «15» марта 2022 г., протокол № 8

Зав. кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «23» марта 2022 г., протокол №7.

Председатель  Ризаев М.К.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» марта 2022 г.

Начальник УМУ  Гасангаджиева А.Г.

## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина уравнения в частных производных входит в обязательную часть образовательной программы бакалавриата по направлению (специальности) 01.03.01 Математика. Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук, кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.

Уравнения в частных производных представляет собой один из трудных и важных разделов математики, имеющих приложения к физическим задачам. Этот раздел является продолжением курса обыкновенных дифференциальных уравнений и сознательное его освоение не мыслимо без устойчивых и глубоких знаний по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Уравнения в частных производных применяются в гидродинамике, в теории упругости и т.д. Дисциплину «Уравнения в частных производных» необходимо изучить для исследования вопросов связанных с методами математической физики.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

- готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности (ОПК-1);
- способностью строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата (ПК-3).

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, практические занятия и самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: контрольная работа и коллоквиум, зачет и промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 6 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Семестр	Учебные занятия для очной формы обучения							Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)	
	в том числе:								
	всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем					СРС, в том числе зачет и экзам.		
		всего	из них						
	Лекции и	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации				
5	108	56	28	-	28	-	-	52	зачет
6	108	52	26	-	26	-	-	20+36	Экзамен

### 1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Уравнения в частных производных» является изучение различных методов решения основных уравнений математической физики (уравнений Лапласа, колебания струны, теплопроводности).

### 2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина «Уравнения в частных производных» входит в обязательную часть образовательной программы бакалавриата по направлению 01.03.01 Математика.

Курс «Уравнения в частных производных» преподается на 3 курсе, после изучения вещественного анализа, алгебры и геометрии. Комплексный анализ преподается параллельно с курсом «Уравнения в частных производных». В частности, в обоих курсах изучаются свойства гармонических функций и приводится сравнительный анализ в комплексном анализе в связи с сопряженными гармоническими функциями, а в уравнениях в частных производных – с задачей Дирихле для уравнения Лапласа.

### 3. Общепрофессиональные компетенции выпускников и индикаторы их достижения

Код и наименование компетенции из ОПОП	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения	Процедура усвоения
УК-1.Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1.Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации.	Знает: структуру задач в области математики, теоретической механики и физики, а также базовые составляющие таких задач. Умеет: анализировать постановку данной математической задачи, необходимость и (или) достаточность информации для ее решения. Владеет: навыками сбора, отбора и обобщения научной информации в области математических дисциплин	Устный опрос. Коллоквиум.
	УК-1.2.Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности.	Знает: принципы математического моделирования разнородных явлений, систематизации научной информации в области математики и компьютерных наук. Умеет: системно подходить к решению задач на разнородные явления в области математики и компьютерных наук. Владеет: навыками систематизации разнородных явлений путем математических интерпретаций и оценок	

	<p>УК-1.3.Имеет практический опыт работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.</p>	<p>Знает: современные методы сбора и анализа научного материала с использованием информационных технологий; основные методы работы с ресурсами сети Интернет. Умеет: применять современные методы и средства автоматизированного анализа и систематизации научных данных; практически использовать научнообразовательные ресурсы Интернет в научных исследованиях и в</p>	
--	---	---	--

		<p>деятельности педагога. Владеет: навыками использования информационных технологий в организации и проведении научного исследования; навыками использования современных баз данных; навыками применения мультимедийных технологий обработки и представления информации; навыками автоматизации подготовки документов в различных текстовых и графических редакторах.</p>	
--	--	---	--

<p>ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, и пользоваться их в профессиональной деятельности</p>	<p>ОПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и естественных наук.</p>	<p><i>Знает:</i> теоретические основы базовых математических дисциплин (математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов), а также теоретической механики, физики. <i>Умеет:</i> решать задачи, связанные с исследованием свойств функций и их производных, с интегрированием, с изучением функциональных рядов, с дифференциальными уравнениями, с численным решением дифференциальных уравнений, с алгебраическими уравнениями и их системами. <i>Владеет:</i> базовыми методами современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p>	<p>Устный опрос. Коллоквиум. Контрольная работа.</p>
	<p>ОПК-1.2. Умеет использовать их в профессиональной деятельности.</p>	<p><i>Знает:</i> способы использования знаний в различных областях математики при решении конкретных задач в области математики и</p>	
		<p>естественных наук. <i>Умеет:</i> применять различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач. <i>Владеет:</i> навыками применения методов современного математического анализа при решении конкретных задач в области математики и</p>	

		естественных наук.	
	ОПК-1.3. Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	<p><i>Знает:</i> различные методы современного математического анализа по исследованию математических и естественнонаучных задач.</p> <p><i>Умеет:</i> корректно выбрать методы решения конкретной задачи в области математики и естественных наук.</p> <p><i>Владеет:</i> навыками выбора методов решения задач современного математического анализа.</p>	
ПК-3. Способен собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	ПК-3.1. Знает основы современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	<p><i>Знает:</i> разные подходы к определению основных понятий математики; основные понятия информатики; формулировки математических утверждений при различных изменениях их исходных условий; различные языки программирования;</p> <p><i>Умеет:</i> устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики математики и информатики необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям. <i>Владеет:</i> определенными навыками планирования и проведения работы по сборанию, обработке и интерпретированию данных современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.</p>	Устный опрос. Коллоквиум.
	ПК-3.2. Планирует популярные лекции, экскурсии и другие виды деятельности необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	<p><i>Знает:</i> разнообразные формы пропаганды и популяризации знаний в области математики и информатики.</p> <p><i>Умеет:</i> планировать изложение различных базовых вопросов изучения математики и информатики в доступной для</p>	

		данной аудитории форме. <i>Владеет:</i> определенным опытом планирования и про-ведения экскурсий для пропаганды и популяризации знаний в области математики и информатики.	
	ПК-3.3. Проводит необходимую работу по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	<i>Знает:</i> современные методы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям. <i>Умеет:</i> привлечь внимание обучающихся к математическим и компьютерным наукам. <i>Владеет:</i> навыками проведения работы по собиранию, обрабатыванию и интерпретированию современных научных исследований, необходимых для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины. 4.1. Объем дисциплины

составляет зачетных единиц 7.

#### 4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Всего по модулю	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
<i>Пятый семестр</i>								
<b>Модуль I. Классификация уравнений в частных производных</b>								
1. Физические задачи, приводящие к основным уравнениям в частных производных.	5		2	2			14	
2. Классификация уравнений в частных производных	5		2	2			14	Контрольная работа
<b>Всего по модулю 1</b>		<b>36</b>	<b>4</b>	<b>4</b>			<b>28</b>	
<b>Модуль II. Уравнение диффузии (теплопроводности).</b>								



1. Постановка начально-краевых задач.	5		2	2				
2. Метод разделения переменных.	5		6	6			4	
3. Общая первая начально-краевая задача.	5		4	4			4	Коллоквиум
4. Задача Коши	5		2	2				
<b>Всего по модулю 2</b>		<b>36</b>	<b>14</b>	<b>14</b>			<b>8</b>	
<b>Модуль III. Уравнение колебания струны.</b>								
1. Уравнение колебания струны	5		2	2			4	
2. Задача Коши. Формула Даламбера.	5			4			6	Контрольная работа
			4					
3. Метод разделения переменных.	5		4	4			6	Коллоквиум
<b>Всего по модулю 3</b>	<b>5</b>	<b>36</b>	<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	
<b>Промежуточная аттестация</b>								<b>Зачет</b>
<b>ИТОГО за 5 семестр</b>		<b>108</b>	28	<b>28</b>			<b>52</b>	
<i>Шестой семестр</i>								
<b>Модуль IV. Уравнения Лапласа и Пуассона</b>								
1. Постановка краевых задач.	6		2	2				
2. Ортогональная система координат.	6		4	4				
3. Метод разделения переменных.	6		6	8			4	
4. Формулы Грина.	6		4	2				Контрольная работа
<b>Всего по модулю 4</b>		<b>36</b>	<b>16</b>	<b>16</b>			<b>4</b>	
<b>Модуль V. Краевые задачи</b>								
1. Функция Грина задачи Дирихле.	6		2	4			10	Коллоквиум
2. Вопросы единственности задач Дирихле и Неймана.	6		4	2			10	
3. Гармонические функции			4	4				
<b>Всего по модулю 5</b>		<b>36</b>	10	<b>10</b>			<b>16</b>	
<b>Модуль 6. Промежуточная аттестация</b>								
1. Подготовка и сдача экзамена		<b>36</b>					<b>36</b>	
<b>ИТОГО за 6 семестр</b>		<b>108</b>	<b>26</b>	<b>26</b>			<b>20+36</b>	
<b>ИТОГО за год</b>		<b>216</b>	<b>54</b>	<b>54</b>			<b>108</b>	

#### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

##### 4.3.1. Содержание лекционных занятий по дисциплине.

###### Пятый семестр

###### Модуль I.

**Тема 1. Физические задачи.** Физические задачи, приводящие к основным уравнениям в частных производных: к уравнению теплопроводности; к уравнению колебания струны; к уравнениям Лапласа и Пуассона.

**Тема 2. Классификация уравнений в частных производных.** Понятие уравнения в частных производных. Линейные и нелинейные уравнения. Однородные и неоднородные уравнения. Порядок уравнения. Понятие эллиптичности, параболичности, гиперболичности уравнения второго порядка. Классификация линейных уравнений второго порядка от многих переменных.

###### Модуль II.

**Тема 3. Постановка начально-краевых задач для уравнения теплопроводности.** Начальное условие. Граничные условия первого типа. Граничные условия второго типа. Граничные условия третьего типа. Первая начальноранговая задача. Вторая начальноранговая задача. Третья начальноранговая задача. Уравнения с младшими членами. Физическая интерпретация начальных и граничных условий.

**Тема 4. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности.** Метод разделения переменных для однородного уравнения теплопроводности. Задача Штурма-Лиувилля. Собственные значения и собственные функции. Метод разделения переменных для однородного уравнения с однородными граничными условиями для первой начальноранговой задачи. Метод разделения переменных для первой начальноранговой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями. Метод разделения переменных для однородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями для второй начальноранговой задачи. **Тема 5.** Общая первая начальноранговая задача. Первая начальноранговая задача со стационарными неоднородностями. Первая начальноранговая задача для уравнения с младшими членами.

**Тема 6. Задача Коши для уравнения теплопроводности.** Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Следствия из принципа максимума. О корректности первой начальноранговой задачи. Задача Коши на всей прямой в классе ограниченных функций.

###### Модуль III.

**Тема 7. Уравнение колебания струны.** Вывод уравнения колебания струны и постановка (I-й, II-й, III-й) начальноранговых задач. Физическая интерпретация начальных и граничных условий.

**Тема 8. Задача Коши. Формула Даламбера.** Общее решение уравнения колебания струны. Постановка задачи Коши на всей прямой. Вывод формулы Даламбера. Физическая интерпретация формулы Даламбера. Характеристики.

**Тема 9. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны.** Метод разделения переменных для однородного уравнения с однородными граничными условиями для первой начальноранговой задачи. Метод разделения переменных для первой начальноранговой задачи с неоднородным уравнением и с однородными начальными и граничными условиями. Общая первая начальноранговая задача. Первая начальноранговая задача со стационарными неоднородностями.

###### Шестой семестр Модули IV, V.

###### Тема 10. Постановка краевых

задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Граничные условия: первого рода, второго рода, третьего рода.

Внутренняя и внешняя задачи Дирихле, Неймана. Внутренняя и внешняя задача третьего рода. Физические примеры, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона.

**Тема 11. Ортогональная система координат.** Криволинейная ортогональная система координат. Аналитическая форма ортогональности. Элементы длины, площади и объема в криволинейной ортогональной системе координат. Дивергенция и градиент в ортогональной системе координат. Оператор Лапласа в криволинейной ортогональной системе координат. Оператор Лапласа в полярной системе координат. Оператор Лапласа в цилиндрической

системе координат. Оператор Лапласа в сферической системе координат. Сферически и цилиндрически симметричные решения уравнения Лапласа. Особые решения. Фундаментальные решения.

**Тема 12.** *Метод разделения переменных.* Решение внутренней задачи Дирихле для круга методом разделения переменных. Решение внешней задачи Дирихле для круга методом разделения переменных. Решение задачи Дирихле для кольца.

**Тема 13.** *Формулы Грина.* Формула Остроградского. Формула интегрирования по частям. Первая формула Грина. Вторая формула Грина. Третья формула Грина.

#### **Модуль VI.**

**Тема 14.** *Функция Грина задачи Дирихле.* Определение функции Грина и ее свойства. Выражение решения задачи Дирихле посредством функции Грина. Функции Грина для простейших областей: для круга, для шара полуплоскости и др.

**Тема 15.** *Вопросы единственности задач Дирихле и Неймана.* О единственности решения задачи Дирихле. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана.

**Тема 16.** *Принцип максимума.* Принцип максимума для уравнения Лапласа и следствия из нее.

**Тема 17.** *Теоремы о средних значениях.* Теорема о среднем значении для: окружности, круга, сферы, шара.

#### **4.3.2. Содержание практических занятий по дисциплине.**

#### **Семестр 5**

**Тема 1.** Физические задачи, приводящие к основным уравнениям в частных производных: к уравнению теплопроводности; к уравнению колебания струны; к уравнениям Лапласа и Пуассона.

**Тема 2.** Классификация линейных уравнений второго порядка от двух переменных.

**Тема 3.** Классификация линейных уравнений второго порядка от многих переменных.

**Тема 4.** Задача Штурма-Лиувилля.

**Тема 5.** Метод разделения переменных для однородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями для первой начально-граничной задачи.

**Тема 6.** Метод разделения переменных для первой начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями.

**Тема 7.** Общая первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности.

**Тема 8.** Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности со стационарными неоднородностями.

#### **Семестр 6**

**Тема 9.** Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с младшими членами.

**10.** Задача Коши. Формула Даламбера.

**Тема 11.** Метод разделения переменных для однородного уравнения колебания струны с однородными граничными условиями для первой начально-краевой задачи.

**Тема 12.** Метод разделения переменных для первой начально-граничной задачи для неоднородного уравнения колебания струны с однородными начальными и граничными условиями.

**Тема 13.** Общая первая начально-краевая задача для уравнения колебания струны.

**Тема 14.** Начально-краевая задача для уравнения колебания струны со стационарными неоднородностями.

**Тема 15.** Решение внутренней задачи Дирихле для круга методом разделения переменных.

**Тема 16.** Решение внешней задачи Дирихле для круга методом разделения переменных.

**Тема 17.** Решение задачи Дирихле для кольца.

**Тема 18.** Решение задачи Неймана для круга.

**Тема 19.** Формула Грина для полуплоскости.

**Тема 20.** Формула Грина для круга.

**Тема 21.** Формула Грина для шара.

**Тема 22.** Взаимно сопряженные гармонические функции.

**Тема 23.** Аналитические и гармонические функции.

## 5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

*Учебно-методические пособие для самостоятельной работы*

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1986.

### *Задание 1. Перечень вопросов для самостоятельной работы*

№	Вопросы	Литература
1	Канонические формы УЧП	[1], с. 20-22
2	Уравнение колебания струны.	[1], с. 23-27
3	Уравнение продольных колебаний стержней	[1], с. 27-28
4	Энергия колебания струны	[1], с. 28-30
5	Линейная задача распространения тепла	[1], с. 180-184
6	Уравнение диффузии	[1], с. 184-188
7	Краевые задачи для областей, с подвижными границами	[1], с. 468-475
8	Тепловые потенциалы	[1], с. 476-480
9	Задачи, приводящие к уравнению Лапласа	[1], с. 276-2281
10	Задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца	[1], с. 489-492

### *Задание 2. Примерные вопросы к экзамену*

1. Функция Грина для шара
2. Об устойчивости решений для уравнения колебаний струны.
3. Внешняя задача Неймана.
4. Формула Пуассона.
5. Физическая интерпретация формулы Даламбера 6. Формула Даламбера.

7. Общее решение уравнения  $t t$   $x x$
8. Вывод уравнения колебания струны.
9. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности
10. О единственности решения задачи Коши на всей прямой в классе ограниченных функций.
11. Следствия из принципа максимума для уравнения теплопроводности.
12. Теорема о единственности для первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. 13. Принцип максимума для уравнения теплопроводности 14. Уравнения диффузного типа с младшими членами.
15. Задача Штурма-Лиувилля для периодических функций.
16. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности.
17. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения диффузии.
18. Метод разделения переменных для уравнения диффузии с однородными граничными условиями.
19. Вывод уравнения теплопроводности.
20. Граничные условия в задачах диффузного типа.
21. Теплообмен через боковую поверхность. Неоднородное уравнение диффузии.
22. Физическая задача, приводящая к уравнению диффузии.
23. Уравнения с частными производными и их основные типы.
24. I-я формула Грина для бесконечных областей.
25. Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности со стационарными неоднородностями.
26. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебания струны.
27. Внутренняя задача Неймана.
28. Внешняя задача Дирихле для трехмерных и двумерных областей. 29. Принцип максимума (минимума) для гармонических функций
30. Внутренняя задача Дирихле (о единственности решения).
31. Некоторые свойства гармонических функций 32. Формула Остроградского. I-я и II-я формулы Грина.
33. III-я формула Грина.
34. Внутренняя и внешняя задача Дирихле для круга.
35. Сферическая и цилиндрическая системы координат. Особые решения уравнения Лапласа. 36. Дивергенция и оператор Лапласа в криволинейной ортогональной системе координат
37. Элементы длины и объема в криволинейной ортогональной системе координат.
38. Криволинейные ортогональные системы координат.
39. Эллиптические уравнения. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач. Потенциальное течение жидкости.
40. Обоснование метода разделения переменных на примере уравнения колебания струны.
41. Краевые задачи со стационарными неоднородностями для уравнения
42. Общая неоднородная начально-краевая задача для уравнения колебания струны.
43. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения колебания струны с однородными начальными и граничными условиями.
44. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны с неоднородными граничными условиями. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны с однородными граничными условиями.
45. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны с однородными граничными условиями.
46. Функция Грина задачи Дирихле. Свойства

## Задание 2. Рефераты и курсовые работы по темам для самостоятельной работы

1. Обоснование метода разделения переменных на примере уравнения колебания струны.
2. Краевые задачи со стационарными неоднородностями для уравнения теплопроводности.
3. Общая неоднородная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности.
4. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными начальными и граничными условиями.

5. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны с неоднородными граничными условиями.
6. Метод разделения переменных для уравнения колебания струны с однородными граничными условиями.
7. Функция Грина задачи Дирихле. Свойства.

**7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

**7.2. Типовые контрольные задания Контрольные вопросы по курсу**

1. Что такое уравнение с частными производными?
2. Что называется порядком уравнения, его главной частью?
3. Найдите все функции, удовлетворяющие уравнению: а)  $u_x(x, y) = 0$ ; б)  $u_{xy}(x, y) = 0$ ; в)  $u_{xx} = 0$ ; д)  $u_{xx} = 1$ .
4. Какое уравнение называется квазилинейным?
5. По каким признакам можно квалифицировать УЧП? 6. Как понимаются малые колебания струны?
7. Сколько существует решений у уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ?
8. Когда и как получается из уравнения теплопроводности уравнение Лапласа?
9. Каких типов бывают граничные условия?
10. Как ставится смешанная краевая задача для уравнения теплопроводности в одномерном случае? Каков ее физический смысл?
11. Если  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  удовлетворяют уравнению  $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}$  сумма? Если да, докажите.
12. Что такое квадратичная форма и как ее приводят к нормальному виду? В чем заключается закон инерции квадратичных форм?
13. Что такое уравнение смешанного типа? Приведите примеры.
14. Какие свойства решений уравнения эллиптического типа наглядно прослеживаются на примере уравнения  $y''(x) = 0$ ?
15. В чем заключается существенность условия непрерывности решения вплоть до границы в формулировке задачи Дирихле?
16. Что такое фундаментальное решение?
17. Какие процессы описываются уравнениями эллиптического, гиперболического, параболического типов?
18. Что можно сказать о поверхности  $u(x, y) = xy$ ?
19. Приведите конкретные примеры гармонических функций и проиллюстрируйте на них принцип максимума?
20. В чем заключается суть метода Фурье (разделения переменных)?
21. Почему при решении задачи Дирихле для круга перешли к полярным координатам?
22. Что такое среднее значение по окружности, по кругу?
23. Какая функция называется аналитической?
24. Каким должен быть поток тепла через границу, чтобы задача Неймана (для уравнения Лапласа) имела смысл?
25. Как ставится задача Коши для УЧП?
26. Что описывает задача Коши для волнового уравнения?
27. Приведите схему решения смешанной краевой задачи для неоднородного уравнения колебаний струны с неоднородными начальными и граничными условиями.
28. Как доказывается единственность решения задачи Коши в случае уравнения колебаний струны?
29. Как ставится первая краевая задача для уравнения теплопроводности?
30. Что такое фундаментальное решение?

## Тестовые задания

I. Нелинейным уравнением является:

1.  $y'(x) + y(x) = \sin x$ ;
2.  $u_{xx} + u_x u_y = 0$ ;

3.  $u_{tt} = \sqrt{a} u_{xx}$ ;  
 $u_{xx} + u_{yy} = a^3 u_{xx}$ .

4.  $+u_{xy} = 0$  ; 5.

II. Нестандартно поставлена задача:

1.  $u_t = u_{xx}, u(x, 0) = f(x)$  ;
2.  $u_{tt} = u_{xx}, u(x, 0) = f_1(x), u_t(x, 0) = f_2(x);$   
 $u_t = u_{xx}, u(x, 0) = f_1(x), u_t(x, 0) = f_2(t);$  3.  $f_2(t);$  4.  $y'(x)$   
 $y(x) = \sin x, y(0) = y'(0) = 0;$
5.  $u_{xx} + u_{yy} = 0, (x, y) \in G, u_{\partial G} = f(x, y).$

III. Смешанная краевая задача для уравнения колебаний струны решается:

1. методом функции Грина;
2. методом характеристик;
3. методом Фурье;
4. методом сведения к интегральному уравнению;
5. разностными методами.

IV. Некорректно поставлена задача:

1. задача Коши для уравнения теплопроводности;
2. задача Коши для уравнения Лапласа;
3. задача Коши для волнового уравнения;
4. смешанная краевая задача для уравнения колебаний струны; 5. граничная задача для уравнения Лапласа.

V. Для упрощения уравнения  $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$  надо ввести новые переменные по формулам:

1.  $\xi = x, \eta = 3y^2$ ;
2.  $\xi = x - y, \eta = x + y$ ;
3.  $\xi = 2x - y, \eta = x$ ;
4.  $\xi = x + 2y, \eta = x - y$ ; 5.  $\xi = 2x + y, \eta = x - y$  .

VI. Гармонической является функция:

1.  $u(x, y) = x^2 + y^2$ ;
2.  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ;
3.  $u(x, y) = \sin y$ ; 4.  $u(x, y) = \sin y + \cos x$  ;
5.  $u(x, y) = x^2 + 2y^2$ .

VII. Бесконечно гладким является решение:

1. смешанной краевой задачи для уравнения колебаний мембраны;
2. смешанной краевой задачи для волнового уравнения;
3. смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности;
4. задачи Дирихле для уравнения Лапласа;
5. задачи Коши для уравнения колебаний струны.

VIII. Свойством максимума обладает решение уравнения:

1. гиперболического типа;
2. эллиптического типа;
3. колебаний струны;
4. колебаний мембраны;
5.  $y'' + y^2 = 0$ .

IX. С уравнением  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  связаны процессы:

1. распространения тепла в стержне;
2. колебания струны;

3. колебания мембраны; 4. диффузия в жидкостях;  
5. установившиеся.
- X. Общим решением уравнения  $u_{xy}(x, y) = 0$  является:
1.  $u(x, y) = f(x - y)$  ;
  2.  $u(x, y) = f_1(x)f_2(y)$  );
  3.  $u(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ ;
4.  $u(x, y) = f^2(x)$   
5.  $u(x, y) = \sin x$ ;
- XI. Непосредственно нельзя решить уравнение:
1.  $u_{xy}(x, y) = 0$ ;
  2.  $u_{xy}(x, y) + u_y(x, y) = 0$ ; 3.  $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ ;
  4.  $u_{xx}(x, y) = 0$ ;
  5.  $u_{xx}(x, y) + u_x(x, y) = 0$ .
- XII. В граничных условиях для уравнения колебаний струны свободный конец задается условием:
1.  $u|_{x=0} = 0$  ;
  2.  $u|_{x=0} = \mu(t)$  ;
  3.  $u|_{t=0} = 0$  ;
  4. ;
  5.  $t$  .
- $u_x(0, t) = 0$   
 $u_x(0, t) = v$
- XIII. Для геометрической иллюстрации гармонической функции подходят поверхности формы:
1. шляпы;
  2. плоскости;
  3. полусферы;
  4. волнистого шифера;
  5. горная поверхность в окрестности вершины горы.

## Тест №2

- I. Какое из уравнений является уравнением параболического типа:
1.  $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + u_x + u_y$  ;
  2.  $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$  ;
  3.  $u_{xy} = 0$  ;
  4.  $u_{xx} - u_{yy} = 0$  ;
  5.  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ .
- II. Задача Коши поставлена некорректно для уравнения:
1. эллиптического типа;
  2. параболического типа;
  3. гиперболического типа; 4.  $u_{xx} - u_{yy} = 0$ ; 5.  $u_t = u_{xx}$  .
- III. Квазилинейным является уравнение:
1.  $u_{xx} + x_2 u_{yy} + (u_{zz})^2 = 0$ ;
  2.  $u_{xx} + u_{yy} + u u_x = 0$ ;
  3.  $u_{xx} + (u_{yy})^2 = 0$ ;
  4.  $(u_x)^2 + (u_{xx})^2 + u_{xx} + u_{yy} = 0$ ;
  5.  $(u_{xx})^3 + u_{xx} + u_{yy} = 0$ .
- IV. Квадратичной формой является форма вида:
1.  $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_{12} + x_1$ ;
  2.  $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_{12} + x_{22} + x_2$ ;
  3.  $x_{12} + x_{22} + x_{42} + x_{52}$ ;
  4.  $x_1 x_3 + x_2$ ;
  5.  $x_1 x_3 + x_2^2 + x_2$ .



V. Какое из следующих уравнений написано в каноническом виде:

1.  $u_x + u_{yy} + u_{xy} = 0$ ;
2.  $u_{xx} + u_{yy} + uu_x + u_y = 0$ ;
3.  $u_{xx} + u_{yy} + u_{xy} = 0$ ; 4.  $u_x + u_y + u_x u_{yy} + u_{yy} = 0$ ;
5.  $u_{xx} - u_{yy} + u_{xy} = 0$ .

VI. Уравнением смешанного типа является уравнение :

1.  $u_t = a^2 u_{xx}$ ;
2.  $u_{xy} = 0$ ;
3.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ;
4.  $xu_{xx} + u_{yy} = 0$ ; 5.  $u_{xx} - u_{yy} = 0$ .

VII. Какая из следующих задач поставлена некорректно:

1.  $u_t = u_{xx}$ ,  $u(0, t) = f(t)$ ;
2.  $u_{tt} = u_{xx}$ ,  $u(x, 0) = f(x)$ ;
3.  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ,  $u(0, y) = f(y)$ ;
4.  $u_{xy} = 0$ ,  $u(0, y) = f(y)$ ,  $u_y(0, y) = g(y)$ ;
5.  $u_{xx} - u_{yy} = 0$ ,  $u(0, y) = f(y)$ ,  $u_x(0, y) = g(y)$ .

VIII. Гармонической является функция :

1.  $u = xy$ ;
2.  $u = x^2 + y^2$ ;
3.  $u = x^2 - 2xy$ ; 4.  $u = x^3 - y^2$ ; 5.  $u = x^3 - y^3$ .

IX. Методом Фурье решается задача:

1. Коши для уравнения колебаний струны ;
2. Дирихле для уравнения Лапласа;
3. Коши для уравнения колебаний мембраны ;
4. Коши для уравнения Лапласа;
5. для уравнения колебаний струны без начальных условий.

XI. О функции Грина говорят:

1. для задачи Коши;
2. для краевой задачи;
3. для неравенства;
4. для интегрального уравнения;
5. для квазилинейного уравнения

XII. Требование не обращения Якобиана в нуль при упрощении уравнений нужно для:

1. определения типа уравнения;
2. вернуться к прежним переменным;
3. для определения новых переменных;
4. определения квазилинейности уравнения;
5. определения однородности уравнения.

### 7.3. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля – 50 %.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях -30 баллов,
- выполнение лабораторных заданий – 30 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ - 30баллов. Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос -50 баллов,
- письменная контрольная работа -50 баллов,

**8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины. а) основная литература**

- Тихонов, Андрей Николаевич.**  
Уравнения математической физики : [учеб. пособие для вузов] / Тихонов, Андрей Николаевич, А. А. Самарский. - 5-е изд., стер. - М. : Наука, 1977, 1972. - 735 с. : граф. ; 22 см. - 1-80.
- Сборник задач по уравнениям математической физики / [В.С.Владимиров, А.А.Вашарин, Х.Х.Каримова и др.]; под ред. В.С.Владимирова. - 4-е изд., стер. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003, 1982. - 287 с. - ISBN 5-9221-0309-1 : 146-19.
- Владимиров, Василий Сергеевич.**  
Уравнения математической физики : [учеб. для вузов] / Владимирив, Василий Сергеевич ; В.В.Жаринов. - 2-е изд., стер. - М. : Физматлит, 2003. - 398,[1] с. : ил. ; 22 см. - Библиогр.: с. 399. - Рекомендовано МО РФ. - ISBN 5-9221-0310-5 : 132-00.
- Алексеев А.Д.** Уравнения с частными производными в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Д. Алексеев, С.Н. Кудряшов, Т.Н. Радченко. — Электрон. текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. — 80 с. — 978-5-9275-0609-5. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47167.html>

**б) дополнительная литература 1. Михлин, С.Г.**

Линейные уравнения в частных производных : учеб. пособие для ст-тов механико-математических и физических спец. вузов / С. Г. Михлин. - М. : Высшая школа, 1977. - 431 с. - 0-0.

**2. Владимирив, Василий Сергеевич.**

Обобщенные функции в математической физике. / Владимирив, Василий Сергеевич. - 2-е испр, доп. - М : Наука, 1979. - 318 с. : ил. ; 22 см. - (Соврем. физ.-техн. проблемы.). - с.310-314.

**3. Бицадзе Андрей Васильевич.** Сборник задач по уравнениям математической физики : Учебное пособие / Бицадзе Андрей Васильевич. - Изд.2-е. - М. : Наука, 1985, 1977. - 310с. - 1-10.

**4. Кудряшов С.Н.** Основные методы решения практических задач в курсе «Уравнения математической физики» [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.Н. Кудряшов, Т.Н. Радченко. — Электрон. текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2011. — 308 с. — 978-5-9275-0879-2. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47050.html>

**9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	<a href="http://elib.dgu.ru">http://elib.dgu.ru</a> , <a href="http://edu.icc.dgu.ru">http://edu.icc.dgu.ru</a>	
6.	Общероссийский математический портал (MathNet.Ru)	<a href="http://www.mathnet.ru">www.mathnet.ru</a>	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

**10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

№ ч	У Название	Электронный адрес	Содержание
е 1. б н а	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
я 2. п р о г р а м м а  п о  у р а в н е	Exponenta.ru	<a href="http://www.exponenta.ru">www.exponenta.ru</a>	<p><b>Студентам:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий решить свою задачу по аналогии;</li> </ul> <p><b>Преподавателям:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать математические пакеты для поддержки курса лекций.</li> </ul> <p><b>Всем заинтересованным пользователям:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. – можно ознакомиться с примерами применены математических пакетов в образовательном процессе.</li> <li>2. – найти демо-версии популярных математических пакетов электронные книги и свободно распространяемые программы.</li> </ol>
н 3. и	Математика	<a href="http://www.mathematics.ru">www.mathematics.ru</a>	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
я 4. м	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.

в частных производных распределена по темам и по часам на лекции и практические занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам, зачету и сдаче экзамена.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

#### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по уравнениям в частных производных рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

**12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины комплексный анализ. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.